Über einige neuere Ergebnisse aus der algebraischen Theorie der quadratischen Formen

Pfister, Albrecht

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982, S.61-68

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über einige neuere Ergebnisse aus der algebraischen Theorie der quadratischen Formen

Von **Albrecht Pfister,** Mainz

Dem allgemeinen Rahmen dieser Tagung folgend, möchte ich die Themen meines Vortrags weitgehend in der historischen Reihenfolge ihrer Entwicklung darstellen.

1. Ich beginne im Jahre 1936, in dem E. Witt seine berühmte Arbeit [W] über quadratische Formen schrieb. Hier wird bekanntlich die Theorie der quadratischen Formen über einem beliebigen Körper K der Charakteristik $\neq 2$ (für Char $K = 2$ siehe Arf [Ar]) begründet und die Klassifikation der quadratischen Formen über K im wesentlichen auf die Bestimmung der Wittgruppe von K zurückgeführt:
   a) Jede endlichdimensionale quadratische Form q über K ist äquivalent (isometrisch) zu einer Diagonalform $< a_1, \ldots, a_n >$. Dabei steht $< a_1, \ldots, a_n >$ als Abkürzung für die Form $q(x) = \sum_1^n a_i x_i^2$ ($a_i \in K$, x_i Unbestimmte über K)
   b) Man kann sich auf die Betrachtung regulärer Diagonalformen $< a_1, \ldots, a_n >$, alle $a_i \neq 0$, beschränken.
   c) Jede reguläre Form q ist äquivalent zu einer direkten Summe einer „anisotropen" Form q_{an} und einer Anzahl von „hyperbolischen Ebenen":
   $$q \cong q_{an} \oplus \underbrace{< 1, -1 > \oplus \ldots \oplus < 1, -1 >}_{i}$$
   Hierbei sind die Anzahl $i \geqq 0$ und die Form q_{an} (bis auf Äquivalenz) durch q eindeutig bestimmt.
   d) Setzt man $q \sim q' :\Leftrightarrow q_{an} \cong q'_{an}$, so bilden die „Ähnlichkeitsklassen" $\tilde{q}$ der regulären quadratischen Formen q über K, versehen mit den Operationen $\oplus$ (direkte Summe) und $\otimes$ (Tensorprodukt) einen kommutativen Ring W(K).

   Ferner benützte Witt bereits teilweise die geometrische Sprechweise „quadratischer Raum" statt „quadratische Form". Seine Arbeit trug auch zunächst mehr in der Geometrie und der sog. „geometrischen Algebra" reiche Früchte. Als Stichwort nenne ich die Strukturbestimmung der orthogonalen Gruppen durch Dieudonné [Di] (fortgeführt von Eichler, M. Kneser, O'Meara u. a.).

2. Im gleichen Jahr 1936 bewies auch ein Schüler von Witt und Artin einen wichtigen Satz. Ich könnte mir denken, daß Sie diesen Mathematiker nicht erraten, denn er publizierte seinen Satz in einem exotischen Journal, von dem es nur zwei Bände gab, so daß sein Ergebnis für viele Jahre vergessen wurde. Auch heute

noch ist er meines Erachtens nicht so anerkannt, wie es seiner Bedeutung entspricht. Ich rede von dem Chinesen Chiungtze Tsen. Der Titel seiner Arbeit [T] verrät echt chinesische Sprachkunst: Zur Stufentheorie der quasialgebraisch-Abgeschlossenheit kommutativer Körper.

Sein Hauptergebnis lautet:

Satz 1. Sei K ein Körper vom Transzendenzgrad i über einem algebraisch abgeschlossenen Körper C. Sei f eine Form vom Grad d in n Variablen, mit Koeffizienten aus K. Falls $n > d^i$ ist, besitzt f in K eine nichttriviale Nullstelle.

S. Lang [La], ebenfalls Schüler von Artin, hat diesen Satz in seiner Dissertation 1952 erneut bewiesen, vermutlich ohne den Beweis von Tsen zu kennen. Für uns ist später besonders der Spezialfall $d = 2$ von Interesse, der sich auf quadratische Formen bezieht. Auf den Beweis von Satz 1 und die sog. C_i-Eigenschaft von Körpern werde ich noch zurückkommen.

3. Nach dem Kriege war es zunächst ziemlich ruhig in der Theorie der quadratischen Formen. Erst 1963 wurde durch J.W.S. Cassels [C] ein weiterer Meilenstein gesetzt. Er bewies:

Satz 2. Ist $f(x) \in K[x]$ im Körper $K(x)$ Summe von n Quadraten, so ist $f(x)$ bereits im Polynomring $K[x]$ Summe von n Quadraten.

Satz 3. $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ ist im Körper $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$ nicht als Summe von $n-1$ Quadraten darstellbar.

Bemerkungen 1) Satz 2 wird durch eine Art euklidischen Algorithmus bewiesen, Satz 3 folgt leicht durch Induktion nach n aus Satz 2.

2) Satz 2 kann leicht zu folgendem Satz (siehe [P_2]) verallgemeinert werden: Ist q eine n-dimensionale quadratische Form über K und wird $f(x) \in K[x]$ von q über $K(x)$ dargestellt, so wird $f(x)$ von q auch bereits über $K[x]$ dargestellt.

3) Satz 2 kann nicht auf Funktionen in mehreren Variablen verallgemeinert werden. Das hat schon Hilbert festgestellt. Ein explizites Beispiel wurde von Motzkin angegeben: $1-3x^2y^2+x^2y^4+x^4y^2$ ist in $\mathbb{R}[x,y]$ keine Quadratsumme, andererseits aber in $\mathbb{R}(x)[y]$ Summe von 4 Quadraten (siehe [CEP]).

4. Im Anschluß an die Sätze von Cassels konnte ich noch im Jahr 1963 zwei weitere Sätze beweisen (siehe [P_1], [P_2]):

Satz 4. Die Stufe $s(K) = \text{Max}\,\{n : <\underbrace{1,\ldots,1}_{n}> \text{ anisotrop über } K\}$ eines Körpers K ist eine Potenz von 2 oder ∞.

Ist $s(K) = \infty$, so heißt K (formal-)reell. Ist $s(K) < \infty$, so heißt K nichtreell. Dann ist -1 eine Summe von $s = s(K)$ Quadraten in K, aber keine Summe von $(s-1)$ Quadraten.

Satz 5. Die quadratischen Formen q der Gestalt

$$q = \ll a_1, \ldots, a_n \gg := < 1, a_1 > \otimes \ldots \otimes < 1, a_n >$$

(wobei $a_i \in K^*$, Char $K \neq 2$) sind stark multiplikativ, d.h. über dem Körper $K(x) = K(x_1, \ldots, x_{2n})$ gilt:

$$q(x) \cdot q \cong q.$$

Insbesondere gibt es zu den unbestimmten Vektoren x,y einen Vektor z mit Komponenten aus dem Ring $K(x)[y]$, so daß

$$q(x) \cdot q(y) = q(z).$$

Es zeigte sich bald, daß Satz 5 auch unabhängig von den Sätzen von Cassels bewiesen werden kann. Später gab Witt (siehe [Lo] oder [P_5] einen Zweizeilenbeweis von Satz 5. Satz 4 ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 5.

5. In den folgenden Jahren nahm die algebraische Theorie der quadratischen Formen einen stürmischen Aufschwung. Einige Hauptthemen waren (und sind zum Teil noch heute):

   Struktursätze für den Wittring W(K);
   Verhalten von W(K) bei Körpererweiterung;
   Quadratische Formen und symmetrische Bilinearformen über kommutativen Ringen und über Schemata;
   Theorie der Ordnungen und Signaturen von Körpern und Ringen;
   Quadratische Semiordnungen, Ordnungen höherer Stufe;
   Zusammenhang zwischen quadratischen Formen, algebraischer K-Theorie und Kohomologietheorie (mit Werten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

   Auf diese Themen kann ich aber hier aus Zeitgründen und wegen des teilweise umfangreichen theoretischen Unterbaus nicht eingehen. Stattdessen möchte ich mich noch einigen direkter zugänglichen Ergebnissen und Problemen zuwenden.

6. Die Pythagoras-Zahl

Definition. $p(K) = \text{Min}\,\{n: \text{Jede Quadratsumme in } K \text{ ist als Summe von } n \text{ Quadraten darstellbar}\}$
heißt Pythagoras-Zahl von K.
(Diese Definition erscheint wohl zum ersten Mal in [P_6]).

Folgende Ergebnisse über die Pythagoras-Zahl sind bekannt:

(1) $s(K) < \infty \Rightarrow s(K) \leqq p(K) \leqq s(K) + 1$
In dieser Ungleichung können beide Gleichheitszeichen vorkommen

(2) K reeller Zahlkörper $\Rightarrow p(K) = 3$ oder 4
(Lagrange für $K = \mathbb{Q}$, Hilbert, Siegel [S]; siehe auch [HJ])

(3) K Zahlkörper $\Rightarrow p(K(x)) \leqq 5$
(Pourchet [Po], Hsia-Johnson [HJ]

(4) K Funktionenkörper von Transzendenzgrad n über $\mathbb{R} \Rightarrow p(K) \leqq 2^n$ ([P_4])
Folgerung (Quantitative Version des 17. Hilbertschen Problems:) Jede positiv semidefinite Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$ ist Summe von 2^n Quadraten.

(5) $p(\mathbb{R}(x,y)) = 4$ ([CEP])
(6) Es gibt Körper mit nur einer Anordnung und beliebig großer Pythagoras-Zahl $p(K) \leqq \infty$ (Bröcker [B], Prestel [Pr])
(7) Zu jeder Zahl $n \geqq 0$ gibt es Körper K mit $p(K) = 2^n$ und Körper K' mit $p(K') = 2^n + 1$ (Prestel [Pr])

Offene Probleme:
(1') ist die Schranke 2^n in (4) scharf?
(2') Gilt $p(\mathbb{Q}(x,y)) < \infty$?
(3') Kann jede natürliche Zahl n als Pythagoras-Zahl eines Körpers vorkommen?
(Lam hat vor kurzem gezeigt, daß jedes n als Pythagoras-Zahl eines kommutativen Ringes R vorkommt.)

7. Die u-Invariante und die Hasse-Zahl

Sei $W_t(K)$ die Torsionsuntergruppe der Wittgruppe W(K). Man weiß ([P_3]), daß $W_t(K)$ eine 2-Gruppe ist. Für einen nichtreellen Körper K ist $W_t(K) = W(K)$ und $(2s) \times \tilde{q} = 0$ für alle $\tilde{q} \in W(K)$.

Definition. $u(K) = \mathrm{Max}\,\{\dim q : q$ anisotrope quadratische Form über K mit $\tilde{q} \in W_t(K)\}$
heißt u-Invariante von K.

Diese Invariante wurde von Kaplansky [Ka] für nichtreelle Körper eingeführt. Die Bezeichnung kommt daher, daß für $u(K) < \infty$ jede u-dimensionale quadratische Form über K universell ist, d.h. alle Körperelemente darstellt. Die obige auch für reelle Körper brauchbare Definition stammt von Elman-Lam [EL].

Analog kann man definieren:

Definition. ([E], [Pr]). $\tilde{u}(K) = \mathrm{Max}\,\{\dim q : q$ anisotrop und total indefinit über K$\}$
heißt Hasse-Zahl von K.

Dabei heißt q total indefinit, wenn q bezüglich jeder Anordnung des Körpers K (falls K überhaupt Anordnungen besitzt) sowohl positive als auch negative Elemente darstellt. Für nichtreelle Körper K ist also $\tilde{u}(K) = u(K)$. Für reelle Körper K hat man $\tilde{u}(K) \geqq u(K)$ und in vielen Fällen ist $\tilde{u}(K) = \infty$, auch wenn $u(K) < \infty$. Ob auch $u(K) < \tilde{u}(K) < \infty$ vorkommen kann, ist unbekannt. Allgemein scheint $\tilde{u}(K)$ noch schwerer zugänglich zu sein als u(K). Deshalb beschränken wir uns im folgenden auf die u-Invariante.

Bekannte Ergebnisse:
(1) $u(K) = 0 \Leftrightarrow$ K reell und pythagoräisch, d.h. $p(K) = 1$.
(2) $u(K) = 1 \Leftrightarrow$ K quadratisch abgeschlossen
(3) K endlich $\Rightarrow u(K) = 2$
(4) K lokaler Körper (z.B. p-adischer Körper) $\Rightarrow u(K) = 4$
(5) K Zahlkörper $\Rightarrow u(K) = \tilde{u}(K) = 4$ (nach dem Satz von Hasse-Minkowski)

(6) K Funktionskörper von Transzendenzgrad n über $\mathbb{C} \Rightarrow u(K) \leqq 2^n$
(und $= 2^n$ falls $K/\mathbb{C}$ endlich erzeugt) (siehe Satz 1)

(7) $u(K) \in 2\mathbb{Z}$ falls K reell
$u(K) \neq 3,5,7$ für alle Körper K (siehe [L] oder[Lo])

Offene Probleme:

(1') Ist $u(K)$ stets eine Potenz von 2 (oder ∞)? (siehe [Ka])

(2') Gilt $u(K(x)) < \infty$ für einen Zahlkörper K?

(3') Sei K_n Funktionenkörper vom Transzendenzgrad n über $\mathbb{R}$.
Gilt dann $u(K_n) \leqq 2^n$?
Man weiß bisher: $u(K_n) \leqq 4 \cdot 2^n$, $u(K_1) \leqq 2$, $u(K_2) \leqq 6$. (siehe [E]).

Wie bei der Bestimmung von $p(\mathbb{R}(x,y))$ stößt man auch bei der Untersuchung von $u(K_2)$ auf schwierige Probleme über algebraische Kurven, algebraische Flächen und abelsche Varietäten (siehe [P_7]).

8. Systeme von Formen

Systeme von Formen treten schon bei Tsen und Lang in natürlicher Weise auf. Ist nämlich L/K eine endliche Körpererweiterung, etwa $L = K\omega_1 + \ldots + K\omega_r$ mit einer K-Basis $\omega_1, \ldots, \omega_r$, so geht jede Form $f(x_1, \ldots, x_n)$ vom Grad d über L durch die Substitution

$$x_i = x_{i1}\,\omega_1 + \ldots + x_{i1}\,\omega_r$$

über in

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\textstyle\sum x_{1j}\,\omega_j, \ldots, \sum x_{nj}\,\omega_j) = f_1(x_{ij})\,\omega_1 + \ldots + f_r(x_{ij})\,\omega_r$$

wobei $f_1, \ldots, f_r$ als Formen vom Grad d über K in den $n \cdot r$ Variablen x_{ij} zu betrachten sind. f besitzt über L eine nichttriviale Nullstelle genau dann, wenn das System $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ über K eine nichttriviale simultane Nullstelle hat.

Folgende Definition ist naheliegend:

Definition. Sei $i \geqq 0$, $d \geqq 1$.

a) K heißt C_i^d-Körper, wenn jedes System $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ von r Formen des Grades d über K in n gemeinsamen Variablen eine nichttriviale simultane Nullstelle in K hat, sobald $n > r \cdot d^i$ gilt.

b) K heißt C_i-Körper, wenn K für alle $d \geqq 1$ ein C_i^d-Körper ist.

Es gilt dann nach obiger Betrachtung sofort:

Satz 6. K C_i^d-Körper, L/K algebraisch $\Rightarrow$ L C_i^d-Körper.

Mit etwas mehr Aufwand zeigen Tsen und Lang:

Satz 7. K C_i^d-Körper $\Rightarrow$ K(t) C_{i+1}^d-Körper.

Satz 1 ergibt sich aus diesen beiden Sätzen schnell, wenn man mit $i = 0$ startet und den homogenen Hilbertschen Nullstellensatz benützt, der genau besagt, daß ein algebraisch abgeschlossener Körper C ein C_0-Körper ist.

Ersetzt man $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$, so gilt der Hilbertsche Nullstellensatz nicht mehr, und der sog. reelle Hilbertsche Nullstellensatz hilft für Fragen wie (3') von Abschnitt 7 offenbar auch nicht viel. Natürlich kann man über $\mathbb{R}$ von einem System $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ höchstens dann eine nichttriviale Nullstelle erwarten, wenn F in einem geeigneten Sinn „indefinit" ist. Eine naheliegende Definition für quadratische Formen $f_1, \ldots, f_r$ wäre zum Beispiel, daß das Büschel $\{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r \; \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ keine semidefinite Form enthält. Diese Bedingung ist aber für $r \geqq 3$ selbst bei beliebig großer Variablenzahl n nicht hinreichend für die Existenz einer nichttrivialen simultanen Nullstelle, wie Calabi [Ca] an einem Beispiel gezeigt hat. Es scheint, daß viele der sich auf den Grundkörper $\mathbb{R}$ beziehenden Fragen (z.B. (1') von Abschnitt 6, (3') von Abschnitt 7) bei genauerem Hinsehen in das Gebiet der „reellen algebraischen Geometrie" gehören und daher von Natur aus sehr schwierig sind. Es gibt jedoch Anzeichen dafür, daß dieses Gebiet gerade eine neue Renaissance erfährt.

9. Systeme quadratischer Formen

Sei K ein nichtreeller Körper, so daß jedenfalls die soeben für $K = \mathbb{R}$ geschilderten Schwierigkeiten nicht auftreten können. Seien $q_1, \ldots, q_r$ quadratische Formen über K in n gemeinsamen Variablen. Man führt die folgende Bezeichnung ein:

Definition a) Das System $S = \{q_1, \ldots, q_r\}$ heißt isotrop über K, wenn die Formen $q_1, \ldots, q_r$ eine nichttriviale simultane Nullstelle $a \in K^n$ besitzen; anderenfalls heißt S anisotrop.

b) $u_r(K) := \operatorname{Max} \{n : \text{Es existiert ein anisotropes System von r quadratischen Formen über K in n Variablen}\}$.

Es gilt natürlich $u_1(K) = u(K)$. Anfang dieses Jahres hat David Leep [Le], ein junger Amerikaner, den folgenden überraschenden Satz bewiesen:

Satz 8. $u_r(K) \leqq r \cdot u_1(K) + u_{r-1}(K)$ für alle $r \geqq 2$.
Insbesondere gilt: $u_r(K) \leqq \frac{r(r+1)}{2} \cdot u(K)$.

Dabei ist besonders bemerkenswert, daß der Körper K festgehalten werden kann und die endlichen Erweiterungen L von K gar keine Rolle spielen. Man kann sogar umgekehrt aus Satz 8 und den Überlegungen am Beginn von Abschnitt 8 das folgende Ergebnis ableiten:

Korollar: Für K nichtreell, $[L:K] < \infty$ gilt

$$u(L) \leqq \frac{[L:K]+1}{2} \cdot u(K).$$

Das ist eine wesentliche Verbesserung der bisher bekannten Ergebnisse über das Verhalten der u-Invariante bei algebraischen Erweiterungen.

Auch die aus Satz 8 folgenden Ergebnisse über Systeme von quadratischen Formen über p-adischen Körpern oder nichtreellen Zahlkörpern (in beiden Fällen ist $u(K) = 4$) sind neu.

Der Beweis von Satz 8 ist trickreich, aber kurz und elementar. Er benützt im wesentlichen nur lineare Algebra!

10. Die Stufe von Ringen

Nachdem schon im Preludium dieses Vortrags ein chinesischer Beitrag enthalten war, ist es mir ein besonderes Vergnügen, zum Schluß gewissermaßen eine chinesische Tripelfuge anbieten zu können. Es ist der folgende

Satz 9 (Dai-Lam-Peng [DLP], 1980) Der Integritätsbereich

$$R_n = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/(1+x_1^2 + \ldots + x_n^2) \text{ hat die Stufe } s(R_n) = n.$$

Dieses Ergebnis steht in merkwürdigem Kontrast dazu, daß der Quotientenkörper Q_n von R_n die Stufe 2^m hat, wobei 2^m die größte Potenz von 2 ist, welche $2^m \leqq n$ erfüllt. Noch viel interessanter ist der Beweis dieses Satzes. Durch die Substitution $x_j \to ix_j$ mit $i = \sqrt{-1}$ wird die Behauptung $s(R_n) \geqq n$ nämlich in wenigen Zeilen auf den bekannten Satz von Borsuk-Ulam zurückgeführt, wonach es keine antipodentreue Abbildung der $(n-1)$-Sphäre in die $(n-2)$-Sphäre gibt.

Hierdurch eröffnet sich ein neues Kapitel im Zusammenspiel zwischen quadratischen Formen und algebraischer Topologie. Lam beweist interessante Sätze über die Stufe von topologischen Räumen mit Involution. Knebusch [Kn] fand einen im wesentlichen rein algebraischen Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam, den Arason und ich [AP] inzwischen weiter vereinfacht haben.

Literatur

[AP] J.K. Arason – A. Pfister: Quadratische Formen über affinen Algebren und ein algebraischer Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam. Erscheint in J. reine angew. Math.

[Ar] C. Arf: Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2. J. reine angew. Math. **183**, 148–167 (1941).

[B] L. Bröcker: Über die Pythagoraszahl eines Körpers. Arch. Math. **31**, 133–136 (1978).

[Ca] E. Calabi: Linear systems of real quadratic forms. Proc. Amer. Math. Soc. **15**, 844–846 (1964).

[C] J.W.S. Cassels: On the representation of rational functions as sums of squares. Acta Arithm. **9**, 79–82 (1964).

[CEP] J.W.S. Cassels – W.J. Ellison – A. Pfister: On sums of squares and on elliptic curves over function fields. J. Number Theory **3**, 125–149 (1971).

[DLP] Z.D. Dai – T.Y. Lam – C.K. Peng: Levels in algebra and topology. Bull. Amer. Math. Soc. **3**, 845–848 (1980).

[Di] J. Dieudonné: La géométrie des groupes classiques. Ergeb. Math. **5**, 2. Aufl. Springer: Berlin 1963.

[E] R. Elman: Quadratic forms and the u-invariant III. Proc. of Quadr. Form Conf. 1976. Queens Papers in Pure and Applied Math., Vol. **46**, 422–444, Kingston, Ontario.

[EL] R. Elman – T.Y. Lam: Quadratic forms and the u-invariant I. Math. Zeitschr. **131**, 283–304 (1973).

[HJ] J.S. Hsia – R.P. Johnson: On the representation in sums of squares for definite functions in one variable over an algebraic number field. Amer. J. Math. **96**, 448–453 (1974).

[Ka] I. Kaplansky: Quadratic forms. J. Math. Soc. Japan **5**, 200–207 (1953).
[Kn] M. Knebusch: An algebraic proof of the Borsuk-Ulam theorem for polynomial mappings. To appear.
[L] T.Y. Lam: The algebraic theory of quadratic forms. W.A. Benjamin: Reading, Mass. 1973.
[La] S. Lang: On quasi-algebraic closure. Ann. of Math. **55**, 373–390 (1952).
[Le] D. Leep: Systems of quadratic forms. To appear.
[Lo] F. Lorenz: Quadratische Formen über Körpern. Lecture Notes in Math. **130.** Springer: Berlin 1970.
[P_1] A. Pfister: Darstellung von –1 als Summe von Quadraten in einem Körper. London J. of Math. **40**, 159–165 (1965).
[P_2] –,–: Multiplikative quadratische Formen. Arch. Math. **16**, 363–370 (1965).
[P_3] –,–: Quadratische Formen in beliebigen Körpern. Inv. math. **1**, 116–132 (1966).
[P_4] –,–: Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. Inv. math. **4**, 229–237 (1967).
[P_5] –,–: Quadratic forms over fields. Proc. of Symposia in Pure Mathematics XX, 150–160 (1971).
[P_6] –,–: Hilbert's seventeenth problem and related problems on definite forms. Proc. of Symposia in Pure Mathematics XXVIII, 483–489 (1976).
[P_7] A. Pfister: On quadratic forms and abelian varieties over real function fields. Annual Meeting Amer. Math. Soc., San Francisco 1981. To appear in „Contemporary Mathematics".
[Po] Y. Pourchet: Sur la représentation en somme de carrés des polynômes à une indéterminée sur un corps de nombres algébriques. Acta Arithm. **19**, 89–104 (1971).
[Pr] A. Prestel: Remarks on the Pythagoras and Hasse number of real fields. J. reine angew. Math. **303/304**, 284–294 (1978).
[S] C.L. Siegel: Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate. Math. Zeitschr. **11**, 246–275 (1921).
[T] C.C. Tsen: Zur Stufentheorie der quasialgebraisch-Abgeschlossenheit kommutativer Körper. J. Chin. Math. Soc. **1**, 81–92 (1936).
[W] E. Witt: Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. J. reine angew. Math. **176**, 31–44 (1937).